Die erste Fundamentalform. Der Flächeninhalt von beschränkten, abgeschlossenen Gebieten.

Matthias Eulert, 7. Januar 2004, Universität Göttingen

Für das Studium der geometrischen Eigenschaften einer regulären Fläche $\mathcal{S}$ ist die *erste Fundamentalform* von sehr großer Bedeutung. Sie ist ein Ausdruck dafür, wie die Fläche das natürliche innere Produkt des $\mathbb{R}^3$ erbt, das auf jeder Tangentialebene $T_p(\mathcal{S})$ der Fläche $\mathcal{S}$ ein inneres Produkt $\langle\ ,\ \rangle_p$ induziert.
Geometrisch erlaubt uns die *erste Fundamentalform*, Messungen auf der Fläche durchzuführen (Längen von Kurven, Winkel zwischen Tangentenvektoren, Flächeninhalte von Gebieten), ohne uns auf den umgebenden Raum $\mathbb{R}^3$, in dem die Fläche liegt, zu beziehen (vgl. hierzu [1] Kap. 2.5).

Die erste Fundamentalform

Definition: Die durch die folgende Gleichung definierte quadratische Form I_p auf einer Tangentialebene $T_p(\mathcal{S})$ der regulären Fläche $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ heißt die *erste Fundamentalform* von $\mathcal{S}$ in $p \in \mathcal{S}$:

$$I_p : T_p(\mathcal{S}) \to \mathbb{R};\ w \mapsto I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0.$$

Bemerkung: Es ist von Nutzen, die *erste Fundamentalform* in der zu einer Parametrisierung $\mathbf{x}(u, v)$ bei $p \in \mathcal{S}$ assoziierten Basis $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ auszudrücken. Da ein Tangentenvektor $w \in T_p(\mathcal{S})$ Tangentenvektor an eine parametrisierte Kurve $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)),\ t \in (-\epsilon, \epsilon)$, ist mit $p = \alpha(0) = \mathbf{x}(u_0, v_0)$, erhält man

$$\begin{aligned} I_p\left(\alpha'(0)\right) &= \left\langle \alpha'(0),\ \alpha'(0) \right\rangle_p \\ &= \left\langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v',\ \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \right\rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u,\ \mathbf{x}_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle \mathbf{x}_u,\ \mathbf{x}_v \rangle_p u'v' + \langle \mathbf{x}_v,\ \mathbf{x}_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2, \end{aligned}$$

wobei die Werte der auftretenden Funktionen für $t = 0$ berechnet werden, und

$$E(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_u,\ \mathbf{x}_u \rangle_p, \qquad F(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_u,\ \mathbf{x}_v \rangle_p, \qquad G(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_v,\ \mathbf{x}_v \rangle_p$$

die Koeffizienten der *ersten Fundamentalform* in der Basis $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ von $T_p(\mathcal{S})$ sind.

Wie bereits erwähnt, kann man mit der Kenntnis von I metrische Fragen auf einer regulären Fläche behandeln, ohne sich weiter auf den umgebenden Raum $\mathbb{R}^3$ zu beziehen. So ist die Bogenlänge s einer parametrisierten Kurve $\alpha : (a,b) =: J \subset \mathbb{R} \to \mathcal{S}$ durch

$$s(t) = \int_0^t \left|\alpha'(t)\right| dt = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(t))}\, dt$$

gegeben. Ist im Spezialfall $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ in einer zur Parametrisierung $\mathbf{x}(u,v)$ gehörenden Koordinatenumgebung enthalten, so könnten wir die Bogenlänge von α, z.B. zwischen 0 und t, berechnen durch

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}\, dt.$$

Auch der Winkel θ, unter dem sich zwei parametrisierte reguläre Kurven $\alpha : J \to \mathcal{S}$, $\beta : J \to \mathcal{S}$ bei $t = t_0$ schneiden, ist gegeben durch

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(t_0),\ \beta'(t_0)\rangle}{|\,\alpha'(t_0)|\,|\,\beta'(t_0)|}$$

Insbesondere ist der Winkel φ zwischen den Koordinatenkurven einer Parametrisierung $\mathbf{x}(u,v)$

$$\cos\varphi = \frac{\langle \mathbf{x}_u,\ \mathbf{x}_v\rangle}{|\,\mathbf{x}_u|\,|\,\mathbf{x}_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}\ ;$$

es folgt, dass die Koordinatenkurven einer Parametrisierung genau dann orthogonal sind, wenn $F(u,v) = 0$ ist für alle (u,v). Solch eine Parametrisierung heißt *orthogonale Parametrisierung.*

Der Flächeninhalt

Definition: Es sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ ein beschränktes abgeschlossenes Gebiet in einer regulären Fläche, das in einer Koordinatenumgebung der Parametrisierung $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S}$ enthalten ist. Die positive Zahl

$$A(\mathcal{R}) = \iint_Q |\,\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|\; du\, dv, \qquad Q = \mathbf{x}^{-1}(\mathcal{R}),$$

heißt *Flächeninhalt* von $\mathcal{R}$.

Bemerkung: Man stellt fest, dass $|\,\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|^2 + \langle \mathbf{x}_u,\ \mathbf{x}_v\rangle^2 = |\,\mathbf{x}_u|^2 \cdot |\,\mathbf{x}_v|^2$, weshalb man den Integranden von $A(\mathcal{R})$ als $|\,\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = \sqrt{EG - F^2}$ schreiben kann.

Literatur

[1] **Carmo, Manfredo P.** do: *Differential geometry of curves and surfaces,* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976